Exercice 1. • Matrice A. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A = (X-2)^2(X^2-4\,X+4) = (X-2)^4\,.$$

Il n'y a donc qu'une seule valeur propre, $\lambda = 2$ et le polynôme minimal doit donc être du type $\mu_A = (X-2)^k$ avec $1 \leq k \leq 4$ (car la multiplicité de chaque racine dans le polynôme minimal est inférieure ou égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique).

On cherche la plus petite valeur de k telle que $(A-2\mathrm{I}_4)^k = 0$. Pour cela, on calcule :

$$(A-2\cdot\mathrm{I}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A-2\cdot\mathrm{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices ne sont pas nulles. Nous calculons plus loin :

$$(A-2\cdot\mathrm{I}_4)^3 = (A-2\cdot\mathrm{I}_4)^2(A-2\cdot\mathrm{I}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est la matrice nulle. Ainsi le polynôme $(X-2)^2$ n'est pas annulateur de A, alors que $(X-2)^3$ l'est.

Le polynôme minimal est donc $\mu_A = (X-2)^3$.

• Matrice B. Le polynôme caractéristique est $\chi_B = (X-1)^2(X-2)$. Par conséquent, le polynôme minimal est $\mu_B = (X-1)^k(X-2)$, avec $1 \leq k \leq 2$ (mêmes racines, avec multiplicités plus petites ou égales). Un calcul simple donne

$$(B-\mathrm{I}_3)(B-2\,\mathrm{I}_3) = \begin{pmatrix} 4b & 0 & 4b \\ b & 0 & b \\ -4b & 0 & -4b \end{pmatrix},$$

qui est la matrice nulle si et seulement si $b = 0$. Par conséquent on a

$$\mu_B(X) = \begin{cases} (X-1)(X-2) & \text{si } b = 0, \\ (X-1)^2(X-2) & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

Exercice 2. (a) On montre d'abord que 0 est valeur propre de tout endomorphisme nilpotent f. Supposons que f est nilpotent d'ordre m. Alors $f^{m-1} \neq 0$ et $f^m = 0$. La condition $f^{m-1} \neq 0$ signifie qu'il existe $v \in V$ tel que $w = f^{m-1}(v) \neq 0 \in V$.

Alors $f(w) = f^m(v) = 0 = 0 \cdot w$. Donc w est vecteur propre et la valeur propre correspondante est $\lambda = 0$.

Montrons maintenant que 0 est la seule valeur propre de f. Supposons que λ est valeur propre. Alors il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que $f(v) = \lambda v$. Alors on vérifie facilement par récurrence que $f^m(v) = \lambda^m v$. Mais $f^m = 0$ et $v \neq 0$, donc on doit avoir $\lambda = 0$.

(b) Les raisonnements ci-dessus n'utilisent aucune hypothèse sur la dimension de V, donc le résultat précédent est encore vrai si $\dim(V) = \infty$.

(c) La réciproque de (a) n'est pas vraie en général. Par exemple l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $\chi_A = X(X^2+1)$. Donc il n'y a qu'une valeur propre réelle, qui est $\lambda = 0$, cependant cette endomorphisme n'est pas nilpotent.

Toutefois si on considère A comme matrice complexe, alors le polynôme caractéristique se factorise en $\chi_A = X(X-i)(X+i)$, il y a donc des valeurs propres non nulles, qui sont $\pm i$.

Au final la situation est la suivante : *Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé, alors f est nilpotent si et seulement si $\sigma(f) = \{0\}$.*

La preuve est presque immédiate puisqu'un tel endomorphisme est triangulable.

Exercice 3. (a) Si $A^5 = \mathrm{I}_3$, cela implique que $P = X^5 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Or, sur le corps des complexes, ce polynôme est scindé à racines simples car on peut le factoriser comme produit de monômes de degré 1 :

$$\begin{aligned} P = (X^5-1) &= (X-1)(X-\zeta)(X-\zeta^2)(X-\zeta^3)(X-\zeta^4) \\ &= (X-1)\left(X - e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{2\pi i}{5}}\right)\left(X - e^{\frac{4\pi i}{5}}\right)\left(X - e^{-\frac{4\pi i}{5}}\right), \end{aligned}$$

où l'on a noté $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Donc le polynôme minimal est aussi un produit de monômes de degré 1 par conséquent A est diagonalisable.

(Remarquons que l'argument nous dit que le spectre complexe de A est un sous-ensemble de $\{\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, 1\}$, on sait qu'il y a au plus 3 valeurs propres car A est une matrice de taille 3).

(b) L'idée est de partir de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\zeta} \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est réel (penser à la dernière série !) et de la conjuguer pour la rendre réelle. La matrice de passage est de plus de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Par exemple, on peut prendre

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}$$

Finalement, on trouve la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Autrement, on peut penser à la section 13 du polycopié sur les endormorphismes réels.

Cette matrice représente une rotation d'angle $2\pi/5$ autour de l'axe (Ox) dans $\mathbb{R}^3$ (on verra cela précisément dans le cours). Comme $A = PBP^{-1}$, on a également $A^5 = PB^5P^{-1} = \mathrm{I}_5$ car ζ est une racine 5-ème de l'unité. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi = -(X-1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X + 1\right),$$

qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ce qui implique que A n'est pas diagonalisable (bien sûr une rotation n'est jamais diagonalisable sur les réels, sauf si l'angle de rotation est égal à π ou 0).

Remarque 1. Si vous vous amusez à vérifier le résultat à l'ordinateur, vous trouverez la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+10} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5}+10} & \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

En effet, on a

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) \\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} \end{cases}$$

Sauriez-vous retrouver ce résultat directement ? [1]

Exercice 4. On suppose que f est nilpotent d'ordre m, alors par définition $f^m = 0$ et $f^{m-1} \neq 0$. On peut donc trouver un vecteur $u \in V$ tel que $f^{m-1}(u) \neq 0$. Il faut alors prouver que les vecteurs $\{u_1, \dots, u_m\}$ définis par comme dans l'énoncé sont linéairement indépendants. Supposons que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f^{m-j}(u) = 0.$$

En appliquant f^{m-1} à cette équation, on trouve

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f^{2m-1-j} u = \alpha_m f^{m-1}(u),$$

et l'hypothèse $f^{m-1} \neq 0$ entraîne que $\alpha_m = 0$. Mais alors on a

$$\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j f^{m-j}(u) = 0,$$

et en appliquant f^{m-2} à cette relation on trouve que $\alpha_{m-1} = 0$. En répétant l'argument, on trouve que $\alpha_m = \alpha_{m-1} = \cdots = \alpha_1 = 0$. On a prouvé que $\{u_1, \dots, u_m\}$ sont linéairement indépendants. Ces vecteurs forment donc une base puisque $m = \dim(V)$. On retrouve l'argument donné en cours.

1. La raison pour laquelle $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ peut s'exprimer sous forme de radicaux vient du fait que le pentagone peut se construire à la règle et au compas. Gauss, à 19 ans à peine, montra que l'heptadécagone, ou polygone régulier à 17 côtés, est également un nombre constructible. C'est toujours le cas pour les polygones réguliers dont le nombre de côté est un nombre premier de Fermat, c'est-à-dire, un nombre premier de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ (les seuls nombres premiers de Fermat connus sont $F_0 = 2 + 1 = 3$, $F_1 = 2^2 + 1 = 5$, $F_2 = 2^4 + 1 = 17$, $F_3 = 2^8 + 1 = 257$ et $F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$; on peut donc exprimer $\cos(2\pi/65537)$ sous forme de radicaux !).

Dans cette base, la matrice f est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve le bloc de Jordan $J_m(0)$ vu en cours.

Exercice 5. (a) La définition est $\delta_{f,\lambda}(k) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k\right)$.

(b) En utilisant que $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$ et $g \circ f_2 = f_1 \circ g$, on a

$$f_2(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; g(f_2(x)) = 0 \;\Leftrightarrow\; g \circ f_2(x) = f_1 \circ g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_1(g(x)) = 0.$$

Ceci montre que $x \in \mathrm{Ker}(f_2) \;\Leftrightarrow\; g(x) \in \mathrm{Ker} f_1$. Donc g induit une bijection de $\mathrm{Ker}(f_2)$ vers $\mathrm{Ker}(f_1)$ et par conséquent $\dim(\mathrm{Ker}(f_2)) = \dim(\mathrm{Ker}(f_1))$.

Le même raisonnement montre $\dim\left(\mathrm{Ker}(f_2 - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f_1 - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k\right)$ car si f_1 et f_2 sont conjugués, alors $(f_1 - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k$ et $(f_2 - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^k$ le sont aussi.

(c) Il suffit d'appliquer le résultat de l'Exercice 1.10 (Série 1) à l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{Id}_V$.)

Exercice 6. 1. La réponse est négative. Un exemple simple est

$$A = D + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice D est diagonale (donc diagonalisable) et $N^2 = 0$, donc N est une matrice nilpotente. Cependant, $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

Il ne faut pas confondre avec le théorème de décomposition de Dunford qui dit que pour toute matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ $DN = ND$. La condition de commutation des deux matrices est une condition supplémentaire et n'est pas une conséquence des autres conditions comme le montre l'exemple précédent.

2. La réponse est négative. Par exemple le polynôme minimal de
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est $\chi_B = X^2$, il est de degré $d = 2$, qui ne divise pas 3. (On a toujours $d \leq n$ mais il n'y a aucune raison que d divise n.)
3. La réponse est positive. On rappelle que les racines du polynôme minimal d'une matrice sont exactement les valeurs propre de cette matrice. Par conséquent si $\mu_A(0) \neq 0$, alors 0 n'est pas valeur propre de A, ce qui signifie que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et donc A est inversible.

Exercice 7. (a) La linéarité de T_a se vérifie directement :
$$(\alpha\,\varphi + \beta\,\psi)(x+a) = (\alpha \cdot \varphi)\,(x+a) + (\beta \cdot \psi)\,(x+a)$$
(b) $\varphi \in \mathrm{Ker}(T_a)$ si $\varphi(x+a) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que φ est la fonction nulle. Donc $\mathrm{Ker}(T_a) = 0$.

(c) φ est une fonction propre pour $\lambda = 1$ si $T_a\varphi = \varphi$, ce qui signifie que $\varphi(x+a) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En d'autres termes φ est une fonction périodique de période a — par exemple $\varphi(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)$.

(d) La fonction $\psi(x) = \exp(\alpha\,x)$ est une fonction propre car
$$T_a(\psi)(x) = e^{\alpha(x+a)} = e^{a\,\alpha}e^{\alpha\,x} = \lambda\,\psi(x),$$
avec la valeur propre $\lambda = e^{a\,\alpha}$.

Exercice 8. On trouve les matrices
$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Remarque : On peut facilement vérifier sur ces matrices que
$$T_a = \mathrm{I}_3 - aD + \frac{a^2}{2!}D^2 - \frac{a^3}{3!}D^3.$$
Le même exercice sur l'espace $\mathscr{P}_m$ des polynômes de degré au plus m montrerait que $T_a = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{(-a)^k}{k!}D^k$, ce qui exprime la formule de Taylor pour les polynômes de degré au plus m.

Exercice 9. 1. La fonction $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ vérifie $D(\varphi) = \alpha\,\varphi$. C'est donc une fonction propre pour l'opérateur D avec valeur propre α.

2. On vérifie la formule par récurrence. Pour $m = 1$ on a $e^{\alpha x}D(e^{-\alpha x}h) = -\alpha h + Dh = (D - \alpha\,\mathrm{Id}_V)h$. Supposons maintenant que le résultat vrai pour m et montrons le pour $m+1$:
$$\begin{aligned}(D-\alpha\,\mathrm{Id}_V)^{m+1}h &= (D-\alpha\,\mathrm{Id}_V)(D-\alpha\,\mathrm{Id}_V)^m h = (D-\alpha\,\mathrm{Id}_V)e^{\alpha x}D^m(e^{-\alpha x}h)\\ &= \alpha e^{\alpha x}D^m(e^{-\alpha x}h) + e^{\alpha x}D^{m+1}(e^{-\alpha x}h) - \alpha e^{\alpha x}D^m(e^{-\alpha x}h)\\ &= e^{\alpha x}D^{m+1}(e^{-\alpha x}h),\end{aligned}$$
qui est la formule à démontrer.

3. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $(D - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^m\varphi(x) = 0$. Par le résultat précédent, on a $e^{\alpha x}D^m(e^{-\alpha x}\varphi(x)) = 0$, ce qui équivaut à dire que
$$D^m(e^{-\alpha x}\varphi(x)) = 0,$$
car l'exponentielle ne s'annule jamais. Cette condition est vérifiée si et seulement si $e^{-\alpha x}\varphi(x)$ est un polynôme de degré strictement plus petit que m. Ce qui signifie que $\varphi(x) = e^{\alpha x}q(x)$, avec $q(x)$ un polynôme de degré strictement inférieur à m.

4. Une base de $\mathrm{Ker}(D - \alpha\,\mathrm{Id}_V)^m$ est donnée par
$$\mathscr{B} = \left\{e^{\alpha x}, x\,e^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, ..., x^{m-1}e^{\alpha x}\right\}$$
(la vérification est facile).

5. Par définition, $\mathscr{S} \subset V$ est le noyau de l'opérateur linéaire $T : V \to V$ défini par
$$T = \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 4\,\mathrm{Id} = D^3 - 3\,D^2 + 4\,\mathrm{Id}.$$
c'est donc un sous-espace vectoriel (car le noyau d'un opérateur linéaire est toujours un sous-espace vectoriel).

6. L'opérateur T peut s'écrire $P(D)$, avec $P(X) = X^3 - 3\,X^2 + 4$. On peut factoriser $P = X^3 - 3\,X^2 + 4 = (X+1)(X-2)^2$, et les deux polynôme $(X+1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux. Le Lemme des Noyaux nous dit alors que
$$\mathscr{S} = \mathrm{Ker}(p(D)) = \mathrm{Ker}(D+1) \oplus \mathrm{Ker}(D-2)^2.$$
Par le point 4. on sait qu'une base de $\mathrm{Ker}(D+1)$ est donnée par $\{e^{-x}\}$ et qu'une base de $\mathrm{Ker}(D-2)^2$ est donnée par $\{e^{2x}, x\,e^{2x}\}$. Par conséquent, une base de $\mathscr{S}$ est $\{e^{-x}, e^{2x}, x\,e^{2x}\}$.

7. Par le point précédent on sait que toute solution de l'équation différentielle $T(h) = 0$ s'écrit de façon unique $h(x) = \lambda_1\,e^{-x} + \lambda_2\,e^{2x} + \lambda_3\,x\,e^{2x}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. En considérant les conditions initiales proposées, on trouve le système d'équations

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\,\lambda_2 \hphantom{+ 4\,\lambda_3} = 1 \\ -\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \quad \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\,\lambda_2 \ + 4\,\lambda_3 = -1 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système linéaire par la méthode de Gauss-Jordan ou une autre méthode. On trouve que $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$ et $\lambda_3 = -1$,. On a finalement la solution voulue :

$$u(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} - x\,e^{2x}.$$

On peut facilement vérifier que u est solution de l'équation différentielle et vérifie les conditions initiales données au point 5.